American Journal of Engineering Research (AJER)
e-ISSN: 2320-0847 p-ISSN : 2320-0936
Volume-11, Issue-04, pp-86-89
www.ajer.org
Research Paper Open Access

On the order of approximation of multiply differentiable functions by linear operators

Musaev A. M., Gasimov G. G.
Musaev Ali Mehdi, Ph.D., Assoc. Professor Azerbaijan State Oil and Industrial University, Baku
Gasimov Gasim Gurban Ph.D., Associate Professor Azerbaijan State Oil and Industrial University, Baku

Abstract: The class and order of saturation of the approximation of functions $f(x)(f(t)\in L_\sigma^p(R^+), p\geq 1)$ by linear operators are defined in [1]

$$T_\lambda(f;x)=\lambda\int_0^x f(x-t)k(\lambda t)dt) \qquad (*)$$

with a positive kernel in the metric of the space $L_\sigma^p(R^+)$.

Keywords: metric, spaces, order, linear operator, integral operator, weak compactness, transformations.

Аннотация: В работе [1] определены класс и порядок насышения приближения функций $f(x)(f(t)\in L_\sigma^p(R^+), p\geq 1)$ линейнымы операторами

$$T_\lambda(f;x)=\lambda\int_0^x f(x-t)k(\lambda t)dt) \qquad (*)$$

с положительным ядром в метрике пространства $L_\sigma^p(R^+)$.

Ключевые слова: метрика, пространства , порядок ,линейный оператор, интегральный оператор, слабой компактность, преобразования.

Date of Submission: 04-04-2022 Date of acceptance: 19-04-2022

Введение. В настоящем работе на основании линейного оператора $(*)$ мы построили новые линейные операторы, которые дают высокий порядок приближения многократно дифференцируемых функциям.

Пусть $L_\sigma^p(R^+)$ есть пространство измеримых в $R^+(0;\infty)$ функции $f(x)$, для которых $\|f(x)\|_{L_\sigma^p(R^+)}<\infty\ (\sigma>0)$,
где

$$\|f(x)\|_{L_\sigma^p(R^+)}=\left\{\begin{matrix}\left\{\int_0^\infty |e^{-\sigma x}|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \quad npu\ \ 1\leq p<\infty \\ \underset{0<x<\infty}{\text{supvrai}}|f(x)e^{-\sigma x}|\end{matrix}\right\}$$

Обозначим через $a_p(s^v;f)$ класс функций $f(\mathrm{x})$ имеющих производные $f^{(v)}(x)\in L_\sigma^p(R^+),(\nu=\overline{1,N})$ и удовлетворяющая условиям:

$$f^{(v)}(0)=0\ \ u\ \ f^{(v)}(x)\,\epsilon\,AC_{loc}(R^+)$$

Очевидно, что если $f(x)\in a_p(s^v;f)$, то преобразования Лапласа к порядка функции $f(x)$ равно:

$$\int_0^\infty e^{-s}f(x)\,dx=s^v f^{\wedge}(s),\ \ (s=\sigma+\omega i,\sigma>0,v=\overline{1,N})$$

Рассмотрим приближения многократно дифференцируемых функций линейными операторами вида

$$Q^{[m]}(f;x)=R_{\lambda,1}\left(R_{\lambda,2}\left(\dots\left(R_{\lambda,l}(f;x)\right)\dots\right)\right)-\sum_{V=1}^{m-1}\frac{\alpha_v(R)}{\lambda^v}f^{(v)}(x) \qquad (1)$$

где $l\in N,\alpha_v(l),(v=\overline{1,N})$ действительные числа и

$$R_{\lambda,n}(g;x)=\lambda\int_0^x g(x-t)K_n(\lambda t)dt\ \ (n=\overline{1,l}) \qquad (2)$$

$K_{\lambda,n}(t)\in\lambda\,K_n(\lambda t)\ \ (n=\overline{1,l})$ определенная на $R^+(0;\infty)$ функция, называемая ядром, со свойствами:

$$K_{\lambda,n}(t) = L(R^{+}),\ \int_0^\infty K_{\lambda,n}(t)dt = 1 \quad \text{и} \quad \int_0^x K_{\lambda,n}(t)dt \to 1, (\lambda \to \infty).$$

Очевидно, что если $f^{(v)}(x) \in L_\sigma^p(R^+)$ $(1 \le p < \infty)$, то интегральный оператор (1) существует почти всюду на R^+ и $Q^{[m],l} f(x) \in L_\sigma^p(R^+)$

В дальнейщем нам понадобятся следушие условие:

Условия $\boldsymbol{D_m(\alpha(l), \beta(l))}$: Если для действительных чисел $\alpha_v(l)$ $(v = \overline{0, m-1}$, $\alpha_0(l) = 1)$ и $\beta(l) \neq 0$ имеет место:

$$\lim_{\lambda\to\infty} (\tfrac{s}{\lambda})^{-m} \left[\prod_{n=1}^{e} K_n^{\wedge}(\tfrac{s}{\lambda}) - \sum_{V=0}^{m-1} \alpha_v(l) \cdot \left(\tfrac{s}{\lambda}\right)^{v} \right] = \beta(l) \neq 0$$

для некоторой фиксированной s$(Res > 0)$, то мы будем говарь что ядро $K_n(t)(n = \overline{1, l})$, оператора (2) удовлетворяют условию $D_m(\alpha(l), \beta(l))$, где a$(l) = (\alpha_0(l), \alpha_1(l) \dots \alpha_l(m-1))$.

Введем класс функций

$$b_p(s^v; f) = = \begin{cases} f(x) \in a_1(s^v; f)(v = \overline{0, m-1}) \ |s^m f^{\wedge}(s) = h_1^v(s)\text{, где } h_1(t) \in BV_\sigma R^+, \\ \int\limits_0^\infty e^{-\sigma t} |\, dh_1(t) < +\infty, \\ f(x) \in a_p(s^v; f)(v = \overline{0, m-1})\, |s^m f^{\wedge}(s) = h_2^{\wedge}(s), \text{где } h_2(t) \in L_\sigma^P(R^+), p > 1 \end{cases}$$

Теорема. Пусть ядры $K_{\lambda,n}(t) = \lambda K_n(\lambda t)(n = \overline{1, l})$ оператора (2) удовлетворяют условию и $f(t) \in a_p(s^v; f)(v = \overline{0, m-1})$, макаовы, что функция

$$\Theta_{m,e}\left(\frac{s}{e}\right) = \frac{1}{\beta(e)} [\, (\tfrac{s}{\lambda})^{-m} \quad \prod_{n=1}^{e} K_n^{\wedge}(\tfrac{s}{\lambda}) - \sum_{V=0}^{m-1} \alpha_v(l) \cdot \left(\tfrac{s}{\lambda}\right)^{v}]$$

есть, преобразование Лапласа- Стильтеса нормированной функции с ограниченной вариацией на R^+ при p =1 или преобразование Лапласа функций из пространства $L^p(R^+)$ при $p > 1$. Тогда из $f(x) \in b_p(s^v, f)$

вытекает соотношение

$$||R_{\lambda,1}(R_{\lambda,2}\left(\dots(R_{\lambda,l}(f; x)) \dots\right)) - \sum_{\vartheta=0}^{m-1} \frac{\alpha_v(l)}{\lambda^v} f^v(x)||_{L_\sigma^p(R^+)} = 0(\lambda^{-m}) \qquad (3)$$

при $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Пусть $p = 1$. Рассмотрим частичный интеграл $S_{T,\lambda}(x)$ =

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT} e^{sx} \left[\prod_{n=1}^{e} K_n^{\wedge} \left(\frac{s}{\lambda}\right) \alpha_v(l) \cdot \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{v} f^{\wedge}(s) ds \right] \qquad (4)$$

где $\sigma > 0$ и T> 0 любые числа.

Средние Фейера $\sigma_{r',\lambda}(x)$ частичных интегралов $S_{T,\lambda}(x)$ равно

$$\sigma_{r',\lambda}(x) = \frac{1}{r'} \int_0^{r'} S_{T,\lambda}(x) dT = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-ir'}^{\sigma+ir'} (1 - \tfrac{\tau}{r'}) e^{sx} \ [\prod_{n=1}^{l} K_n^{\wedge} \left(\frac{s}{\lambda}\right) -$$

$$- \sum_{\vartheta=0}^{m-1} \alpha_v(e) \cdot \left(\frac{S}{l}\right)^{\vartheta}] f^{\wedge}(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-r'}^{r'} (1 - \frac{\tau}{r'}) e^{(\sigma + i\tau)x} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \int_0^\infty l^{(\sigma+i\tau)v} \cdot [\, R_{\lambda,1}(\lambda_{\lambda,2}\left(\dots\left(\lambda_{\lambda,e}(f; u)\right)\right) - \sum_{\vartheta=0}^{m-1} \frac{\alpha_v(l)}{\lambda^v} f^v(u) \right\} d\tau.$$

Так как согласно лемме В [2] внутренний интеграл сходится равномерно на $-\acute{r} \le \tau \le \acute{r}$, то

$$\sigma_{r',\lambda}(x) = \frac{r}{\pi r'} \int_0^\infty e^{\sigma(x-u)} \frac{\sin^2 r' \frac{x-u}{2}}{(x-u)^2} \begin{bmatrix} R_{\lambda,1}(R_{\lambda,2}\left(\dots\left(R_{\lambda,l}(f; u)\right) \dots\right) - \\ - \sum_{\vartheta=0}^{m-1} \frac{\alpha_v(l)}{\lambda^v} f^{(v)}(u) du \end{bmatrix}$$

Далее, учитывая (3) получаем, что

$$||\sigma_{r:\lambda}(x)||_{L_\sigma(-\infty,+\infty)} \le \le ||R_{\lambda,1}(R_{\lambda,2}\left(\dots(R_{\lambda,l}(f; x)) \dots\right)) - \sum_{\vartheta=1}^{m-1} \frac{\alpha_v(l)}{\lambda^v} f^v(x)||_{L_\sigma(R^+)} = 0(\lambda^{-m}) \qquad (5)$$

при $\lambda \to \infty$. Следовательно

$$\left| \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-ir'}^{\sigma+ir'} \left(1 - \frac{|\tau|}{r'}\right) e^{sx} \left[K_n \quad \left(\frac{S}{\lambda}\right) - \sum_{V=0}^{m-1} \frac{\alpha_v(l)}{\lambda^v} S^v \right] f^{(S)ds} \right| \right|_{L_\sigma(-\infty,+\infty)} = = 0(\lambda^{-m}) \qquad (6)$$

при $\lambda \to \infty$. Кроме того в силу условия $D_m(\alpha(l), \beta(l))$ имеем

$$| \lambda^m \left[\prod_{n=1}^{l} K_n^{\wedge}\left(\frac{s}{\lambda}\right) - \sum_{\vartheta=0}^{m-1} \alpha_v(l).\left(\frac{s}{\lambda}\right)^v \right] \le \beta(l) s^m |$$

и

$$\left| e^{-\sigma x}\left(1-\frac{|\tau|}{r'}\right) e^{sx} \left[\prod_{n=1}^{l} K_n^{\wedge}\left(\frac{s}{\lambda}\right) - \sum_{\vartheta=0}^{m-1} \alpha_v(l) \cdot \left(\frac{s}{\lambda}\right)^v \right] f^{\wedge}(s)\lambda^m \right| \le r\, \beta(l) \cdot |s^m| \cdot |f^{\wedge}(s)|$$

для каждого $\lambda > \lambda_{0,} |\tau| < r'$, где $s = \sigma + i\tau, \sigma > 0$.
Следовательно

$$2\beta(l) = \int_{-r'}^{r'} [\sigma + i\tau]^m \cdot | f^{\wedge} (\sigma + i\tau)| \, d\tau \le 2\beta(l) \int_{-r'}^{r'} (\sigma^2 + \tau^2)^{\frac{m}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} |f(t) dt| \right) d\tau \le M < \infty ,$$

т.е условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла выполняется для интеграла, стоящего слева в равенстве поэтому из (6) находим

$$\frac{1}{2\pi i} \lambda^m \int_{\sigma+ir'}^{\sigma+ir'} \left(1-\frac{|\tau|}{r'}\right) e^{sx} \left[\prod_{n=1}^{l} K_n^{\Lambda}\left(\frac{s}{\lambda}\right) - \sum_{v=0}^{m-1} \alpha_v(l) \left(\frac{s}{\lambda}\right)^v \right] f^{\wedge}(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-ir'}^{\sigma+ir'} \left(1-\frac{|\tau|}{r'}\right) e^{sx} \beta(l) s^v f^{\wedge}(s) ds + 0(1),$$

при $\lambda \to \infty$.

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\sigma x} \sigma_{r',\lambda}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-ir'}^{\sigma+ir'} \left(1-\frac{|\tau|}{r'}\right) e^{sx} \beta(l) s^v f^{\wedge}(s) ds \; .$$

Так как $e^{-\sigma x} \left| \sigma_{r',\lambda}(x) \right| \lambda^m > 0$ и кроме того справедлива оценка (5), то

$$\int_{+\infty}^{+\infty} e^{-\sigma x} \left| \sigma_{r',\lambda}(x) \right| \lambda^m dx < \infty \, .$$

Таким образом, выполнены требования леммы Фату и учытывая (6) находим:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-ir'}^{\sigma+ir'} \left(1 - \frac{|\tau|}{r'}\right) e^{sx} \beta(l) s^m f^{\wedge}(s) ds \right| L_{\sigma(-\infty;+\infty)} = 0(1)$$

Для завершения даказательства $f(x) \in b_p\left(s^{\theta}, f\right) (v = \overline{0,m}$ при $p = 1$ остается применить лемму А [2]
.

Пусть $1 < p < \infty$ в силу (3) и теоремы о слабой компактности в пространстве $L^p(R^+)$, существует последовательност $\{\lambda_j\}$ $(\lim_{j\to\infty} \lambda_j = \infty)$ и функция $q_l^{[m]} \in L^p(R^+)$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon x} g(x) \lambda_j^m \left[Q_j^{[m],l}(f; x) - f(x) \right] dx = \int_0^{\infty} g(x) q_l^{[m]}(x) dx \qquad (7)$$

для каждой $g(t) \in L^q(R^+), pq = p + q$ $(\varepsilon > 0$ любые число), где $Q_j^{[m],l}(f; x)$ определяется из формулы (1).

Пусть $h(t) = e^{\varepsilon t} q_l^{[m]}(t)$. Покажем, что $h(t) \in L^p(0, r)$ для каждого положительного r .

Так как в силу (3)

$$\left\| \lambda_j^m \left[Q_j^{[m],l}(f; x) - f(x) \right] \right\|_{L^p(0,r)} \le$$

$$\le e^{\varepsilon r} \left\| \lambda_j^m \left[Q_j^{[m],l}(f; x) - f(x) \right] \right\|_{L^p(R^+)} = 0(1)$$

То опять по теореме о слабой компактности существует подпоследовательность λ_{j_k} $(\lim_{\lambda_{jk}\to\infty} \lambda_{jk} = \infty)$

и функция $h_r(t) \in L^p(0, r)$,
такая, что

$$\lim_{\lambda_{jk}\to\infty} \int_0^r v(x) \left[Q_{\lambda_{j_k}}^{[m],l}(f; x) - f(x) \right] \lambda_{\lambda_{j_k}}^m dx = \int_0^r v(x) h_r(x) dx \qquad (8)$$

для каждого $v(x) \in L^q(0, r)$.
Выберем

$$g(x) = \begin{Bmatrix} e^{\varepsilon x} v(x) \; npu \; 0 \le x \le r \\ 0 \qquad npu \;\; x > r \end{Bmatrix}$$

Так как $g(x) \epsilon \{L^q(0, r)\}$ и справедливо (7) то

$$\lim_{\lambda_{jk} \to \infty} \int_0^r v(x) \left[Q_{\lambda_j}^{[m],l} (f; x) - f(x) \right] \lambda_{\lambda_j}^m dx = \int_0^r v(x)\, h(x) dx \qquad (9)$$

Сравнивая (8) и (9) находим что $h(x) = h_r(x)$ почти всюду u $h(x) \in L^p(0,r),\ (r > 0)$
Теперь, если в равенстве (7) взять

g(x) $e^{-[(\sigma-\varepsilon)+i\tau]x}$ $(\sigma > 0, -\infty < \tau < \infty)$

то имеем

$$\lim_{\lambda_j \to \infty} \lambda_j^m \int_0^\infty e^{-sx} \left[Q_{\lambda_j}^{[m],l} (f; x) - f(x) \right] dx = \int_0^\infty e^{-sx} g(x) dx \quad (Res > 0).$$

Отсюда в силу условия $D_m(\alpha(l), \beta(l))$ находим

$\beta(l) s^m f^{\wedge}(s) = g^{\wedge}(s)$, $f(x) \in b_p(s^v; f)$.

Это и есть в случае требуемое соотношение при $1 < p < \infty$. В случае
$p = \infty$ теорема доказывается аналогично.

Литература

[1]. Berens H., Butzer P. On the best approximation for singular integrals by Laplace transform methods, On Approximation Theory, P.L. Butzer and J. Korevaar, JSNMS, Birkhauser, 1964, pp.24-42.

[2]. .Kolbe W., Nessel R. Saturation theory in connection with Mellin transform methods, SJAM, J. MatR. Anal. V3, №2, 1972, pp.246-252.

[3]. Cynoymu (G.Sunouchi) – Direct theorems in the theory of approximation, Acta math., 20(3-4), 1969, p. 409-420.

[4]. Голубов Б.И. Об асимптотике кратных сингулярных интегралов для дифференцируемых функций. Матем. заметки, 1981, т.30, №5, с. 749-762.

[5]. Мамедов Р.Г. Преобразование Меллина и теория приближения Баку1991 г. 272 стр.

[6]. Butzer P. Nessel R. Fourier analysis and approximation, V1, New York and London, 1971.

[7]. Musayev A.M. On saturation order of functions some variables by singular. International journal of Applied Mathematics, Vol.31, №2018, June.

[8]. Musayev A.M. On asymptotic estimation of approximation of functions by general Mellin type a singular integrals. Transformation of Azerbaijan, 2009, XXIX, №4, pp.113-121.

[9]. A.M.Musayev On saturation order of functions some variables by sinqular . International journal of Applied Matematics, vol.31,№3,2018 june ISSNB11-1728, e İSSN1314-8060, Bulqaria.8 st.

[10]. Musayev A.M. On linear operators giving higher order approximation of functions in $L_o^p(R^+)$, International Journal of Applied Mathematics, Vol.33, №1, 2020, pp.15-27.

[11]. Musayev A.M. Boundedness of commutators of an oscillatory inteqral operators in variable exponent Morrey spaces, International Journal of Applied Mathematics, IIAM,ISSN ,1311-1728, Vol.34, № 4,pp.745-760,august 2021