

Automatic construction of humidity variation model in complex closed apparatus and a numerical solution approach

G. G. Gasimov, E.S. Pashayev

Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, associative professor

Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, master student

Corresponding Author: Gasimov G.G.

Abstract: the paper studies the processes of moisture exchange occurring in systems of closed apparatuses. It is assumed that the network under consideration is filled with a moisture carrier (liquid, gas, air, etc.) and consists of a streamline, structural elements and volumes. An algorithm for automatic construction of mathematical models of moisture exchange has been developed. A technique and algorithm for solving the problem have also been developed.

Keywords: moisture exchange, boundary conditions, hyperbolic equation, grid method, difference schemes, straight line method, streamlines, structural element, volume.

Date of Submission: 07-10-2022

Date of acceptance: 19-10-2022

Введение. Изучение процессов влагообмена всегда играло важную роль в развитии техники и естествознания.

При проведении различные замкнутые аппараты (ЗА), системы достаточно больших размеров, в которых следует поддерживать определенные влажностные режимы, обеспечивающие работоспособность находящихся внутри людей, агрегатов и т.п

Во время работы отдельные элементы и узлы (двигатели, компрессоры, холодильные установки) высокоскоростных летательных аппаратов нагреваются по-разному. Для надежной работы конструкций необходимо предпринять меры, которые установили бы предел роста температуры и влаги.

Комплексу уравнений, составленных для каждого узла совместно с краевыми условиями регулирования процессов влагообмена, представляет собой системы уравнений, описывающих влагообмен в ЗА. Таких узлов в аппарате может быть достаточно много.

На рис.1 показана одна часть замкнутого аппарата (ЗА). В этом процессе участвуют разные элементы.

На каждом из этих элементов изменение влагообмена описывается математическими моделями.

Построение математической модели

В схеме участвуют следующие элементы линии тока, объем и элементы конструкции и элементы автоматики [1,3]. Элементы линии тока определяются уравнениями частных производных. Элементы объема и элементы конструкции модели описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Начальными условиями являются:

$$d^k(V_k, 0) = c, \quad (c = \text{const}), \quad \text{здесь } k \in B, \quad B \subset \Omega, \quad (2)$$

граничного условия:

$$d^k(0, t) = d^{k-1}(L_{k-1, t}) \quad 0 \leq |V_k| \leq L_k \quad (3)$$

$$J'_k = \frac{J_k}{L_k \cdot v_k / U_k}, \quad k+1 \in A \subset \Omega \quad (4)$$

A - множество жидкостно-жидкостных теплообменников, B - множество элементов линии тока, Ω - множество содержащее все элементы в себе, L_{k-1} - конец $(k-1)$ -го элемента; d^k - значение влаги k -ой линии тока.

Уравнение, описывающее влагообмен через воздух в объемах первой группы с гарантированным перемешиванием (объемную интенсивность которых необходимо учитывать), имеет вид:

$$\rho_k V_k \cdot \frac{dd1^k}{dt} = \sum_{j_{\bar{a}\bar{o}}} (\rho_k v_{j_{\bar{a}\bar{o}}} \cdot d_k) - d_k \sum_{j_{\bar{a}\bar{o}}} (\rho_k v_{j_{\bar{a}\bar{o}}}) + \sum J_{k\bar{a}\bar{i}\bar{c}} \quad (5)$$

где: $\sum_{j_{\bar{a}\bar{o}}} (\rho_k v_{j_{\bar{a}\bar{o}}} \cdot d1^k)$ - количество влаги, забираемое из объекта в единицу времени;

$d1^k \sum_{j_{\bar{a}\bar{o}}} (\rho_k v_{j_{\bar{a}\bar{o}}})$ - количество влаги, поступающей в объем в единицу времени;

$\sum J_{k\bar{a}\bar{v}\bar{o}}$ - количество влаги, забираемое из объекта в единицу времени.

Уравнение, моделирующее влагообмен в объемах первой группы с гарантированным перемешиванием (объемная инертность, которая не учитывается) имеет вид:

$$\sum_{j_{\bar{a}\bar{o}}} (\rho_k v_{j_{\bar{a}\bar{o}}} \cdot d1^k) = d1^k \sum_{j_{\bar{a}\bar{o}}} (\rho_k v_{j_{\bar{a}\bar{o}}}) \quad (6)$$

Начальные условия

$$d1^k(t)_{t=0} = c \quad (c = const) \quad (7)$$

Если в сеть входят также смесители, регуляторы, датчики и клапаны, то уравнение, описывающее влагосодержание в смесителе-разделителе имеет вид:

$$d2^k(t) = \frac{\sum_{j=1}^{\Omega} (\rho_k \cdot v_j \cdot d^k)}{\sum_{k=1}^{\Omega} (\rho_k v_j)} \quad (8)$$

где $d2^k$ - значение влаги k -го смесителя-разделителя, $(\rho v)_j$ - массовый расход газа линии тока j ; $(\rho v d^k)_j$ - количество влаги, поступающее по линии тока j .

В герметических отсеках замкнутых аппаратов относительная влажность воздуха должна удовлетворять определенным требованиям. В связи с этим возникает необходимость определения состояния относительной влажности (характеристик) воздух в любой момент времени.

Все вышеперечисленные элементы и их взаимодействия показаны на рис.1 в виде некоторой влагообменной сети. В сеть входят следующие элементы:

11 – линия тока; 1 – элемент конструкции; 1 – объем; 1 – регулятор; 3 – смеситель-разделитель; 3- клапан; 1 – датчик.

Поскольку в задаче рассматривается изменения влаги в стационарном режиме ЗА, в каждом элементарном объеме изменения влаги в одной точке. Говоря об изменении влаги по объему, будем иметь в виду ее изменение по длине.

Решение задачи

Конкретный выбор метода существенно зависит от типа решаемой задачи. В свою очередь эти задачи подразделяются на одноточечные и многоточечные.

Поскольку системы обыкновенных дифференциальных уравнений представляют собой комплексную математическую модель влагообмена в ЗА, возникает проблема выбора устойчивых, в то же время обеспечивающих высокую точность решения численных методов. Дифференциальные уравнения в частных производных в большинстве своем аналитическим методом не решаются. Поэтому широкое распространение получили методы приближенного их решения, в частности методы сеток, прямых, конечных элементов и т.д.

Аппроксимация уравнений в частных производных производится с использованием схем (шаблонов) Лакса, левый угол, четырехточечный, консервативная и неявная.

Аппроксимация уравнений влагообмена в ЗА

а) Применив к уравнениям, модулирующим влагообмен на участках в линии тока (1)-(8), устойчивую схему «левый уголок», получит следующее разностное уравнение:

$$d_{i+1,j}^k = d_{i,j}^k + \left[\frac{1}{V_k \rho_k L_k} \cdot J_{\text{воз}}^k - U_k \cdot \frac{d_{i,j}^k - d_{i,j}^k}{h} \right] \cdot l \quad (9)$$

Начальные и граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} d_{i,0}^k &= c, (c = \text{const}), \\ d_{0,j}^k &= d_{M_{k-1},j}^{(k-1)}; (i = \overline{1, M_{k-1}}; j = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (10)$$

где l - длина шага по времени; n - длина шага по объему; U_k - объемный расход k -й линии тока; V_k - значение объема k -й линии тока; $(k-1)$ - номер предыдущего элемента; M_{k-1} - номер последней узловой точки по V ; d^k - значение влаги k -го элемента; $J_{\text{воз}}^k$ - количество влаги воздуха поступающей в линию тока;

б) Если применить к уравнению (1) шаблон «центральная аппроксимация», то получим:

$$d_{i+1,j}^k = d_{i-1,j}^k + \frac{l}{V_k \rho_k L_k} J_{\text{воз}}^k - \frac{U_k l}{h} \cdot (d_{i,j+1}^k - d_{i,j-1}^k). \quad (11)$$

Начальные и граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} d_{i,0}^k &= c, (c = \text{const}), \\ d_{0,j}^k &= d_{M_{k-1},j}^{(k-1)}; (i = \overline{1, M_{k-1}}; j = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

в) применив линейную аппроксимацию к уравнениям (5), моделирующим влагообмен в объемах первой группы с гарантированным перемешиванием (объемную инертность которых необходимо учитывать), получим:

$$d1_{i+1}^k = d1_i^k + \frac{1}{(\rho_k \cdot V_k)} [\sum_{j_{\text{вых}}} (\rho_k v_{j_{\text{вых}}} \cdot d1_i^k)] - d1_i^k \sum_{j_{\text{вых}}} (\rho_k v_{j_{\text{вых}}}) + \sum_k J_{k\text{воз}} + 0(l). \quad (12)$$

Начальные условия будут:

$$d1_i^k(t)_{t=0} = c, (c = \text{const}), \quad (13)$$

где $d1_i^k$ - значение влаги k -го объема в i -й момент времени, ρ_k - плотность k -го объема, v_j расход влагоносителя j -й линии тока.

г) Если в сеть входят также смесители-разделители, то после аппроксимации уравнение (9) примет следующий вид:

$$d2_{i+1}^k = \frac{\sum_{j=1}^{\Omega} (\rho_k v_j \cdot d2_i^k)}{\sum_{j=1}^{\Omega} (\rho_k v_j)}, \quad (14)$$

где j - номер линии тока, через которую в смеситель-разделитель поступает влага; Ω - количество ветвей, через которые в смеситель-разделитель поступает влага.

Численное решение

Решим эту задачу методом сеток. Для этого введем равномерную сетку по V и t .

$$\begin{aligned} \Omega_h &= \{V_k^j = i \cdot h, j = \overline{0, N_k}; h = L_k / N_k\} \\ \Omega_n &= \{t_i = i \cdot l, i = \overline{0, 1, 2, \dots}\} \end{aligned}$$

где N_k - количество узловых точек по V_k . На сетке $c_{h,e} = \Omega_h \times \Omega_l$ к уравнениям (1)-(4) применим схемы: левый уголок, четырехточечную аппроксимацию и схему Лакса.

Применим к уравнениям (1)-(4) для аппроксимации неявную схему. В результате получена следующая система конечно-разностных уравнений

$$\frac{d_{i+1,j}^k - d_{i,j}^k}{l} + U_k \frac{d_{i+1,j+1}^k - d_{i+1,j}^k}{h} = F(t, \rho_k, V_k, d^k, d^{k+1}, F_k); \quad (15)$$

$$\left(\frac{1}{l} - \frac{U_k}{h} \right) \cdot d_{i+1,j}^k + \frac{U_k}{h} \cdot d_{i+1,j+1}^k = F(t, \rho_k, V_k, d^k, d^{k+1}, F_k) + \frac{1}{\ell} d_{i,j}^k, (i = \overline{1, 2, \dots, J = \overline{1, N}}) \quad (16)$$

где

$$F(t, \rho_k, V_k, d^k, d^{k+1}, F_k) = \frac{J_k}{L_k \cdot \rho_k \cdot \frac{v_k}{U_k}}, k \in \Omega$$

J_k - влаговыделение на единицу длины линии тока, начальные и граничные условия таковы:

$$\begin{aligned} d_{i,0}^k &= c, (c = const), i = \overline{0, N_k}, \\ d_{0,j}^k &= d_{N_{k-1},j}^{k-1}, j = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{17}$$

где $(k-1)$ -й элемент является предыдущим элементом для k .

Система, полученная с помощью неявной схемы аппроксимации (16)-(17), решалась методом Гаусса и модифицированным методом прогонки, разработанным для решения систем дифференциальных уравнений первого порядка.

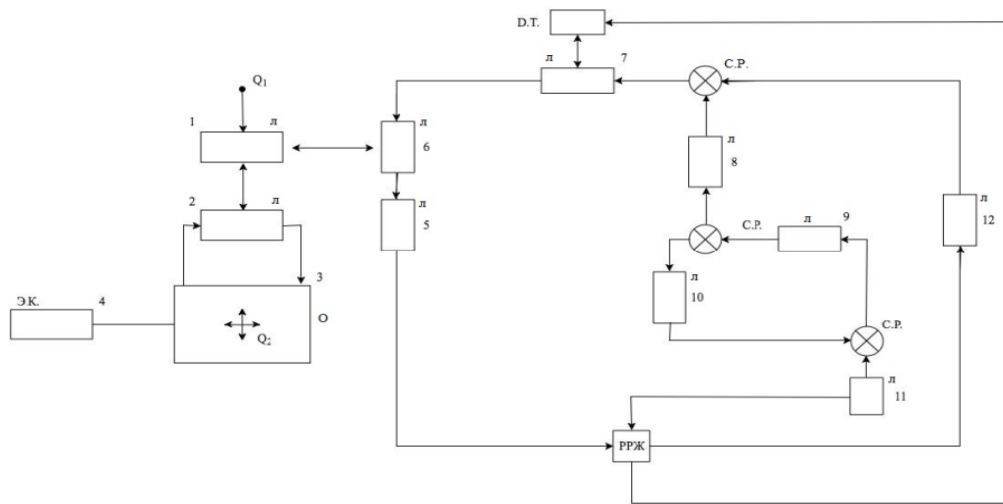


Рис. 1. Влагообменный сеть

В качестве примера рассмотрен задача которого показан в рис.1. В процессе участвует 11 элементов линия тока, 1-элемент объема и 1-элемент конструкция.

$$\begin{aligned} \rho_6 \cdot V_6 \cdot \frac{dd1^6}{dt} &= \rho_6 v_{6вх} \cdot d1^6 - d1^5 \cdot \rho_6 \cdot v_{6вых} + J_{6воз} \\ \rho_k \cdot \left(\frac{\partial d^i}{\partial t} + U_i \cdot \frac{\partial d^i}{\partial V_i} \right) &= \frac{J_i}{L_k \cdot v_i / U_i}, (i = \overline{1, 11}) \end{aligned}$$

Начальные и граничные условия

$$\begin{aligned} d_{i,0}^k &= c, (c = const), i = \overline{0, 5}, j = 1, 2, \dots, \\ d_{0,j}^k &= d_{N_j}^{k-1}, \\ V_1 &= 0.465 \cdot 10^{-3} m^3 \quad J_{воз} = 30.6 m^3 \\ c_1 = 0.532 \quad V_2 &= 0.55 \cdot 10^{-3} m^3 \quad \rho_1 = 691 \text{ кг} / m^3 \\ V_3 &= 0.405 \cdot 10^{-3} m^3 \quad \rho_2 = 1071 \text{ кг} / m^3 \\ V_4 &= 0.394 \cdot 10^{-3} m^3 \quad \rho_3 = 855 \text{ кг} / m^3 \\ V_5 &= 0.55 \cdot 10^{-3} m^3 \quad \rho_4 = 1.205 \text{ кг} / m^3 \\ V_{12} &= 0.37 m^3 \quad \rho_{12} = 0.37 \text{ кг} / m^3 \end{aligned}$$

Неявная схема "левый угол"

Таблица 1

Номер элемента	Время вычисления (1 мин)	Начальное состояние элемента	Значение влаги в начале элемента	Значение влаги в середине элемента	Значение влаги в конце элемента	Смесь ль-разделитель	Регулятор	Температура датчика
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	60	0.509	0.510	0.512	0.513	0.516	1	275.5
2.	60	0.513	0.514	0.515	0.516	"----"	"----"	"----"
3.	60	0.516	0.517	0.517	0.517	"----"	"----"	"----"
4.	60	0.517	0.5172	0.5173	0.5174	"----"	"----"	"----"
5.	60	0.5175	0.5176	0.5177	0.5178	"----"	"----"	"----"
6.	60	0.5178	0.5179	0.5179	0.518	"----"	"----"	"----"
7.	60	0.518	0.519	0.520	0.521	"----"	"----"	"----"
8.	60	0.5214	0.5215	0.5216	0.5217	"----"	"----"	"----"
9.	60	0.5217	0.5218	0.5219	0.522	"----"	"----"	"----"
10.	60	0.5223	0.5224	0.5225	0.5226	"----"	"----"	"----"
11.	60	0.5227	0.5228	0.5229	0.5229	"----"	"----"	"----"
12.	60	0.5164	0.5165	0.5166	0.5167	"----"	"----"	"----"
13.	60	0.5167	0.5168	0.5169	0.517	"----"	"----"	"----"

Результаты численных расчетов. Результаты задачи теплообмена для сети, указанной на рис.1 приведены в таб.1. Как следовало ожидать, наиболее хорошие результаты получены методом сеток с шаблоном аппроксимации «левый угол» (явная схема). Однако для устойчивости метода требуется

выполнения условия Куранта: $U_k \frac{\Delta t}{\Delta V} \leq 1$, т.е. выбор шага по времени зависит от шага по объему и при малом шаге задача решалась достаточно долго. Известно, что при использовании неявной схемы

условие устойчивости имеет вид: $U_k \frac{\Delta t}{\Delta V} \leq 1$, что означает возможность выбора шагов по объему

независимо друг от друга.

Выводы. Разработан алгоритм для автоматизации построения дискретных аналогов математических моделей (10), (12), (13), (15).

При этом необходимо знание начальных значений температур каждого элемента, собственных конструктивных размеров элементов сети, значений коэффициентов теплопередачи между элементами, значение объемных расходов и др. На основе этих данных строятся таблицы связей, которые и являются основной информационной базой для автоматической генерации конечно-разностных схем для моделей (10), (12), (13), (15).

Если в сети существуют линии тока, на которые внешние влаговые воздействия отсутствуют, так да их можно принять за точку, или вовсе не рассматривать. При этом подходе появляется возможность укрупнить шаги и по времени и по объему.

Для учета различных тепловых связей в комплексной математической модели, в алгоритме предусмотрена специальная система кодировки, которая позволяет идентифицировать типы элементов и их взаимное расположение (смежность между собой).

Литература

- [1]. Степаненко В.М., Лыкосов В.Н. Численное моделирование процессов тепловлагообмена в системе водоем-грунт. Метеорология и гидрология. - 2005, №3, с. 95-104.
- [2]. Степаненко В.М., Численная модель процессов тепловлагообмена в системе атмосфера – водоем – почва. Вычислительные технологии, 2004, т.9, часть 1. с.112-122.
- [3]. Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течение в каналах. 2003, Издательства МЭИ, Москва, с. 310.
- [4]. Самарский А.А., Теория разностных схем. Москва «Наука», 1983, с.616
- [5]. Тихинов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики .М.: Наука, 1972.